

SINTEZA LUCRARI FAZA FINALA ANUL 2009

ICHIM BOGDAN NICOLAE

1. INTRODUCERE

Programul Normaliz si-a luat numele de la primul scop pentru care a fost construit: calculul de normalizari ale monoizilor (semigrupuri in alta terminologie) afini. Aceasta sarcina implica calculul bazei Hilbert a monoidului de puncte laticiale intr-un con rational C cu un sistem de generatori dat x_1, \dots, x_n . Aceste conuri pot fi echivalent descrise prin sisteme de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare, in acest caz calculul normalizarii fiind echivalent cu rezolvarea acestor sisteme (pentru detalii matematice vezi [2], [3], [16]).

Punctul de legatura intre dezvoltarea programului Normaliz si proiectul Sistem de Algebra Computerizata pentru rezolvarea Sistemelor de Ecuatii si Inecuatii Diofantice Lineare este exact acesta descriere echivalenta a conurilor rationale.

In actuala faza de dezvoltare a proiectului mi-am concentrat eforturile asupra algoritmilor implementati in programul Normaliz si a imbunatirii interfetei cu utilizatorul, pregatind trecerea la noul program.

2. SCURT ISTORIC

Prima versiune a programului Normaliz a fost un program C creat de Winfried Bruns si Robert Koch in 1997–1998 (vezi [9]) si extins in 2003 de Witold Jarnicki. Versiunea 2.0 (2007–2008) a fost complet rescrisa in C++ de Bogdan Ichim [5]. Algoritmul Pottier pentru rezolvarea sistemelor de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare a fost adaugat in versiunea 2.1 (2009) de Bogdan Ichim [5]. Gesa Kämpf, Bogdan Ichim, Andreas Paffenholz si Christof Söger au adaugat imbunatari la interfata programului in versiunea 2.2 (2009), versiunea disponibila public curent. In prezent Bogdan Ichim si Christof Söger dezvolta o varianta de procesare paralela si cu algoritmi imbunatatiti. Folosind varianta paralelizata a programului am reusit in colaborare cu R. Hemmecke si M. Köppe, dezvoltatorii programului 4ti2, sa rezolvam exemple computationale extrem de dificile provenite din algebra statistica [4].

3. REZULTATE STIINTIFICE

Intr-o prima faza de dezvoltare, suplimentar fata de algoritmul de baza (deja implementat in Normaliz versiunea 2.1), am implementat si algoritmul Pottier [14] pentru rezolvarea sistemelor de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare. Acesta imbunatire a programului de baza a fost facuta publica ca Normaliz versiunea 2.1.

In general nu este usor de decis care din cele doua algoritme se va comporta mai bine in cazul unui exemplu de sistem de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare dat.

Ilustrez aici performanta algoritmului de baza prin doua exemple, unul pentru care este foarte rapid si un al doilea pe care nu-l poate rezolva:

(i) Exemplul `small` din distributia `Normaliz` [6] este definit de un politop laticial de dimensiune 5 cu 190 de varfuri, 32 de hiperplane suport si 34,591 puncte laticiale. Timpul de rulare este 7.2 secunde.

(ii) Exemplul `5x5` din distributia `Normaliz` descrie conul careurilor magice 5×5 [1], adica, matrici 5×5 cu elemente pozitive si suma constanta a linilor, coloanelor si diagonalelor principale. Conul de dimensiune 15 are 1940 raze extreme si 25 hiperplane suport. Insa subconul generat de primele 57 raze extreme (in ordinea in care `Normaliz` le gaseste) are deja 30,290 hiperplane suport. Dupa 104 raze extreme am ajuns la 56,347 hiperplane suport (si am oprit programul).

In cazul algoritmului Pottier situatia se inverseaza — acum (i) este foarte dificil in timp ce (ii) este usor:

(i) Pentru politopul laticial timpul de rulare este de 4796 sec.

(ii) Dupa insertia a 20 de hiperplane dimensiunea bazei Hilbert atinsa este 228, si valorile pentru conurile care urmeaza sunt 979, 1836, 2810, 3247, si in final 4828. Timpul de calcul 2.2 secunde.

O implementare oarecum diferita a algoritmului Pottier a fost realizata in sistemul `4ti2` [10], [11]. Teste asupra variantei publice au aratat ca versiunea noastra este comparabila in performanta.

Rezultatele obtinute in aceasta faza au fost sintetizate in articolul "Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones" [5], articolul fiind trimis spre publicare in *Journal of Algebra*.

In a doua faza de dezvoltare atentia a fost indreptata asupra imbunatatirii interfetei `Normaliz`ului, atat interfata cu utilizatorul cat si cu alte programe. Au fost realizate interfete pentru sisteme de algebra computerizate `Singular`, `Macaulay2` si `Polymake`. Numeroase optiuni au fost adaugate la interfata cu utilizatorul. Toate aceste noi pachete sunt disponibile in varianta publica curenta, `Normaliz` versiunea 2.2.

Echipa condusa de Andreas Paffenholz, dezvoltatorii programului `Polymake`, au integrat deja `Normaliz` in distributia lor curenta. Dan Grayson, care conduce dezvoltarea sistemului `Macaulay`, a anuntat de asemenea includerea `Normaliz` in urmatoarea distributie a programului.

Am intrat de asemenea in contact cu echipa care dezvolta `Cocoa` in vederea integrarii `Normaliz` in sistemul lor. Datorita insa unor diferente de conceptie aceasta operatie este momenta dificila din punct de vedere tehnic, insa urmatoarele etape de dezvoltare vor avea in vedere aceasta.

Intr-o a treia faza de dezvoltare (faza curenta) au fost implementate facilitati de procesare paralela. Programul deja implementat reprezinta o varianta a versiunii `Normaliz` 2.2, nu este insa inca disponibil public.

Datorita imbunatatirii algoritmilor de calcul cat si a implementarii procesarii paralele au fost obtinute mai multe rezultate importante.

Problema normalitatii monoizilor asociati cu tabelele de contingenta $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_N$ a fost aproape in intregime rezolvata de Hibi si Ohsugi [13]. Ultimul caz ramas deschis

Observati ca acesta problema nu poate fi rezolvata direct prin calculul bazelor Hilbert ale conului asociat folosind varianta publica a Normaliz versiunea 2.2 [6] sau varianta publica a 4ti2 versiunea 1.3.2 [11]. Folosind insa ultimile progrese putem arata urmatoarele:

Lema 1. *Monoidul tabelor de contingenta $5 \times 5 \times 3$ este normal.*

Aceasta completeaza clasificarea tabelor de contingenta $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_N$ data in [13]:

Teorema 2. *Fie $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_N \geq 2$ numere intregi. Atunci monoidul atasat tabelor de contingenta $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_N$ este normal daca si numai daca tabelul de contingenta este de dimensiune:*

- $r_1 \times r_2$, $r_1 \times r_2 \times 2 \times \dots \times 2$, sau
- $r_1 \times 3 \times 3$, sau
- $4 \times 4 \times 3$, $5 \times 4 \times 3$, sau $5 \times 5 \times 3$.

Acest rezultat, impreuna cu alte rezultate similare, vor fi publicate in lucrarea "Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics" [4], lucrare aflata in pregatire.

Doresc sa mentionez de asemenea aparitia in acesta perioada a lucrarii "The canonical module of a toric face ring" in Nagoya Mathematical Journal [12].

4. DISEMINAREA REZULTATELOR

In scopul diseminarii rezultatelor am participat al doua conferinte, am tinut sase prezentari in cadrul seminariului de algebra al Institutului de Matematica "Simion Stoilow" si doua prezentari in cadrul seminariului de geometrie algebrica.

Prima participare a fost la "International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics", ICTAMI 2009, Alba-Iulia, pentru care am redactat lucrarea de popularizare "Introduction to Normaliz 2.2" [7].

A doua participare a fost la "International Conference of Science", ICS 2009, Oradea, pentru care am redactat lucrarea de popularizare "Computing the Hilbert polynomial with Normaliz" [8].

BIBLIOGRAFIE

- [1] M. Ahmed, J. De Loera, and R. Hemmecke, *Polyhedral cones of magic cubes and squares*. In *Discrete and computational geometry. The Goodman-Pollack Festschrift*, B. Aronov (ed.) et al., Springer 2003, pp. 25–41.
- [2] W. Bruns and J. Gubeladze, *Polytopes, rings, and K-theory*. Springer 2009.
- [3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings. Rev. ed.* Cambridge University Press 1998.
- [4] W. Bruns, R. Hemmecke, B. Ichim, M. Köppe, and C. Söger, *Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics*. In lucru.
- [5] W. Bruns and B. Ichim, *Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones*. Submis la J. Algebra.
- [6] W. Bruns and B. Ichim, *Normaliz. Computing normalizations of affine semigroups*. With contributions by C. Söger. Available from <http://www.math.uos.de/normaliz>.

- [7] W. Bruns and B. Ichim, *Introduction to Normaliz 2.2*, Acta Universitatis Apulensis, Proceedings of ICTAMI 2009, Alba Iulia , pag 113-132.
- [8] W. Bruns and B. Ichim, *Computing the Hilbert polynomial with Normaliz* , urmeaza sa apara in Proceedings of ICS 2009.
- [9] W. Bruns and R. Koch, *Computing the integral closure of an affine semigroup*. Univ. Iagel. Acta Math. **39** (2001), 59–70.
- [10] R. Hemmecke, *On the computation of Hilbert bases of cones*. In *Mathematical software*, A. M. Cohen (ed.) et al. Proceedings of the 1st international congress. World Scientific., 2002, pp. 307–317.
- [11] R. Hemmecke, R. Hemmecke and P. Malkin, *4ti2. Version 1.3.2. Computation of Hilbert bases, Graver bases, toric Gröbner bases, and more*. Available from <http://www.4ti2.de>.
- [12] B. Ichim and T. Römer. *The canonical module of a toric face ring*. Nagoya Math. J. **194** (2009), 69 – 90.
- [13] H. Ohsugi and T. Hibi, *Toric ideals arising from contingency tables*. In *Commutative Algebra and Combinatorics*, W. Bruns, Ed., Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser. **4** (Part II). Ramanujan Math. Soc., 2007, pp. 91–115.
- [14] L. Pottier, *The Euclidean algorithm in dimension n*. Research report, ISSAC 96, ACM Press 1996.
- [15] M. Vlach. *Conditions for the existence of solutions of the three-dimensional planar transportation problem*. Disc. App. Math. **13** (1986), 61–78.
- [16] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*. Springer 1994.